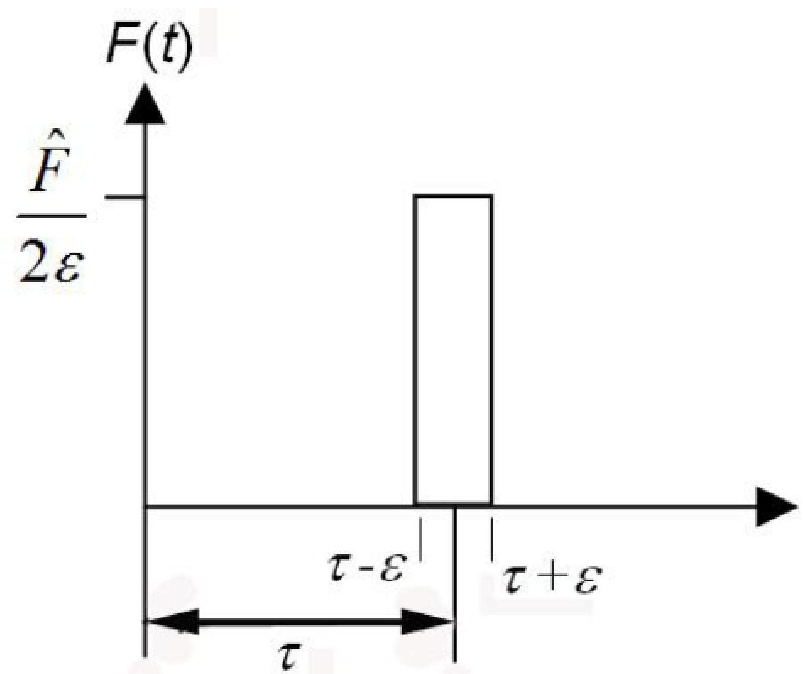
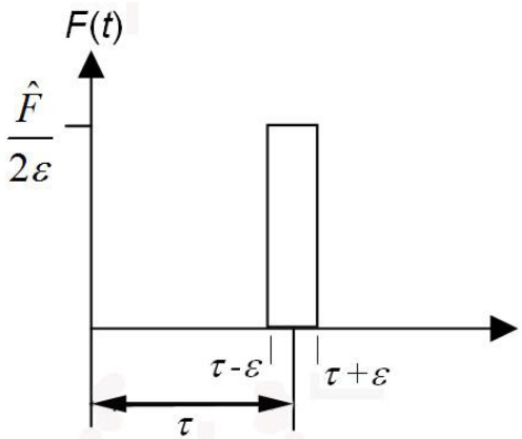


General Force Response

General Force Response

- Impulse force
- Shock force
- Periodic force

Impulse Force



รูปที่ 3-19. แรงดล

$$F(t)=\begin{cases}0 & t<\tau-\varepsilon\\ \dfrac{\hat{F}}{2\varepsilon} & \tau-\varepsilon<t<\tau+\varepsilon\\ 0 & t>\tau+\varepsilon\end{cases}$$

ขณะที่แรง $F(t)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ นอกช่วงเวลา $\tau+\varepsilon$ ถึง $\tau-\varepsilon$

$$I(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt=\frac{\hat{F}}{2\varepsilon}2\varepsilon=\hat{F}$$

ถ้าขนาดของ $\hat{F}$ มีค่าเท่ากับหนึ่ง เราจะเรียกว่าฟังก์ชั่นดลหนึ่งหน่วย (Unit impulse function, $\delta(t)$)

หรือเรียกว่า Dirac delta function

Impulse Force

การตอบสนองของระบบที่มีลำดับขั้นความอิสระเท่ากับหนึ่งและมีความหน่วงต่อแรงดล ขณะที่ระบบหยุดนิ่ง (เงื่อนไขเริ่มต้นเท่ากับศูนย์) โดยพิจารณาแรงดลต่อการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม ที่ $\tau = 0$ เราพิจารณามวลก่อนที่จะมีแรงดลมากระทำ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมขณะแรงดลกระทำ

$$\boxed{m[v(t_0^+) - v(t_0^-)] = mv_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\hat{F} = F\Delta t = mv_0}$$

ขณะที่การกระจัดต้นยังคงเท่ากับศูนย์ ด้วยเหตุนี้แรงดลที่กระทำต่อระบบที่มีลำดับขั้นความอิสระเท่ากับหนึ่งและมีความหน่วง จะเท่ากับการให้ความเร็วต้นแก่ระบบ คือ

$$v_0 = \frac{F\Delta t}{m}$$

Impulse Force

การตอบสนองของระบบจึงเป็นการสั่นอิสระที่มีการกระจัดต้นเท่ากับศูนย์และความเร็วต้น $v_0 = F\Delta t/m$

สำหรับระบบความหน่วงต่ำ $(0 < \zeta < 1)$ เราจะได้ผลเฉลย คือ

$$\boxed{x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t}$$

โดยที่ $h(t)$ – การตอบสนองต่อแรงดลหนึ่งหน่วย(Unit impulse) ที่ $t = 0$ คือ

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

ถ้าเราประยุกต์ใช้ที่ $t = \tau$ และ $\tau \neq 0$ เราสามารถเขียนสมการใหม่ได้

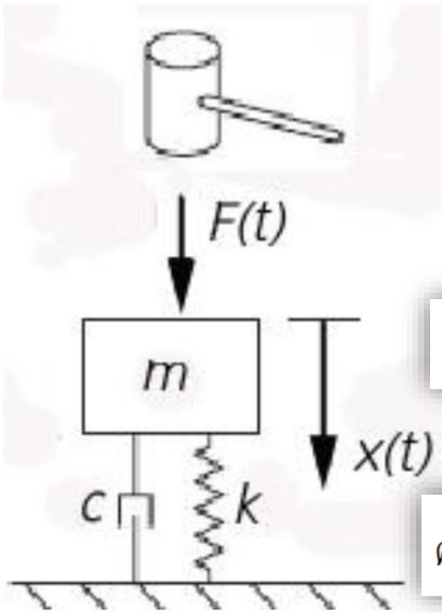
$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau)$$

Impulse Force

สำหรับระบบที่ไม่มีความหน่วง $(\zeta = 0)$ เราจะได้ฟังก์ชั่นการตอบสนองการดล คือ

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)$$

ตัวอย่างที่ e3-5. ในการทดสอบการสั่น โดยมีฆ้อนสำหรับเคาะเพื่อสร้างแรงดล และวัดการตอบสนองของแรงดลที่กระทำต่อระบบ ดังแสดงในรูปที่ e3-8 ถ้าระบบที่ทำการทดสอบมีมวลเท่ากับ 10 kg ค่าคงที่ความหน่วง 100 N-s/m และค่าความแข็งของสปริงเท่ากับ 2000 N/m โดยที่แรงดลมีค่า $\hat{F} = 0.5$ N-s จงหาขนาดการกระจัดสูงสุด และผลการตอบสนองที่เกิดขึ้น



รูปที่ e3-8.การทดสอบการสั่นด้วยแรงดล

ความถี่ธรรมชาติของระบบ $\omega_n = \sqrt{2000/10} = 14.14$ rad/sec

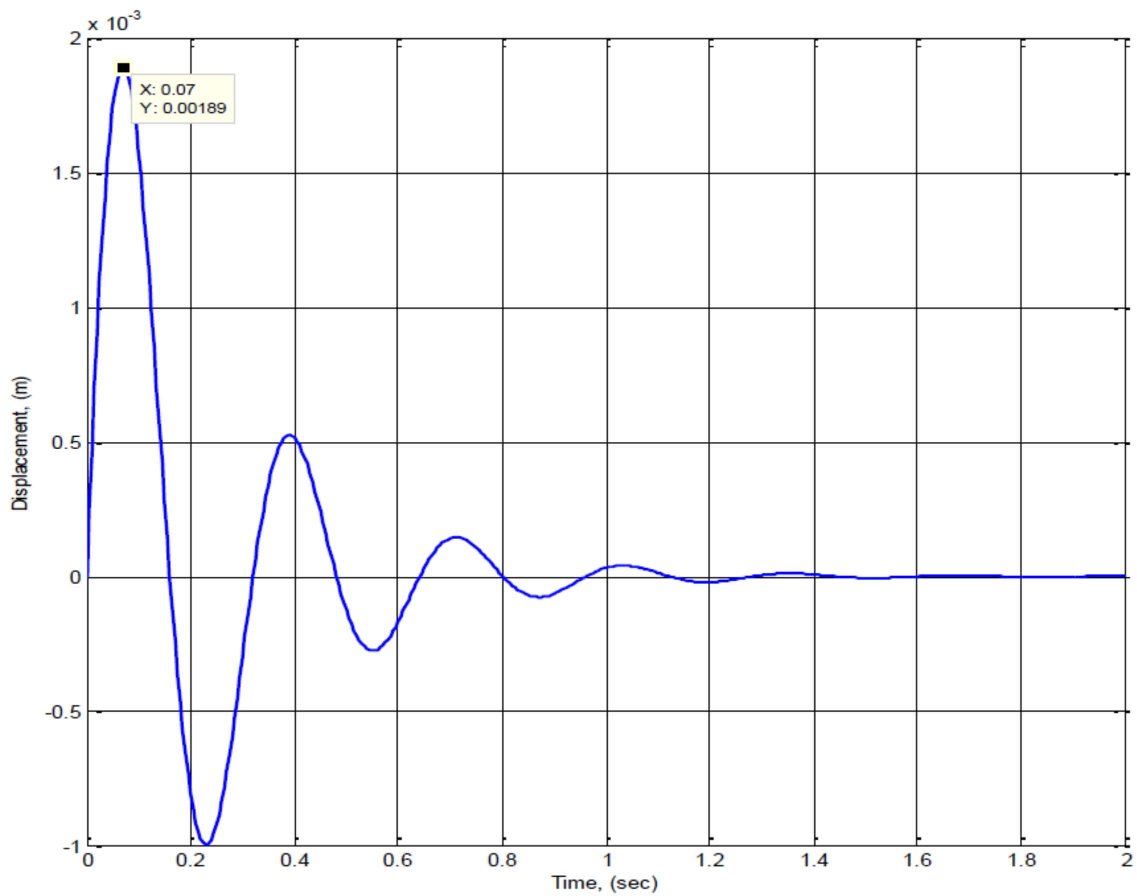
ค่าคงที่ความหน่วงวิกฤต $\boxed{c_c = 1\sqrt{10 \cdot 2000} = 282.84}$ N-s/m

อัตราส่วนความหน่วง $\zeta = c/c_c = 100/282.84 = 0.35$ เป็นระบบความหน่วงต่ำ

ความถี่ธรรมชาติความหน่วงของระบบ $\omega_d = 14.14\sqrt{1-(0.35)^2} = 13.25$ rad/sec

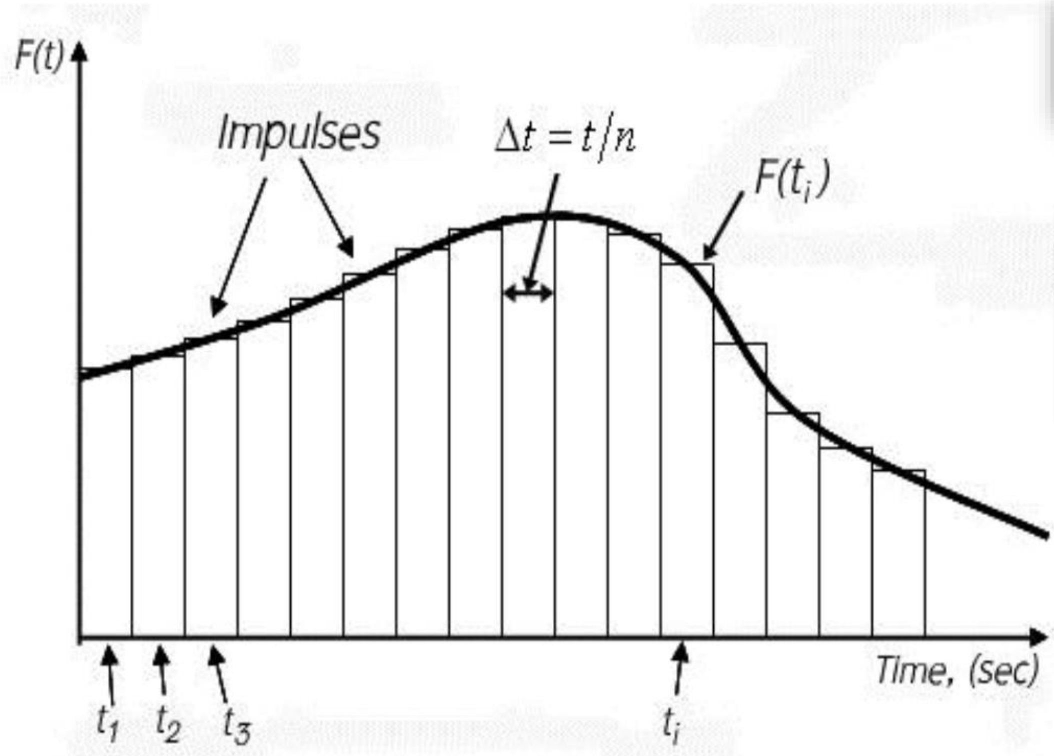
ดังนั้นผลการตอบสนองของระบบต่อแรง $\hat{F} = 0.5\delta(t)$ โดยมี $v_0 = 0.05$ m/s ดังสมการ 3.59 คือ

$$x(t) = 0.00377 e^{-4.949t} \sin 13.25t$$



รูปที่ e3-9.ผลการตอบสนองของแรงดล ตัวอย่างที่ e3-5

Impulse Force



รปที่ 3-20.แรงที่มีลักษณะไม่เป็นคาบ

$$\Delta x(t_i) = F(t_i)h(t - t_i)\Delta t$$

$$x(t_j) = \sum_{i=1}^{j} F(t_i)h(t - t_i)\Delta t$$

ถ้าสมการการเคลื่อนที่เป็นเชิงเส้น เราสามารถประยุกต์ใช้หลักการ Superposition

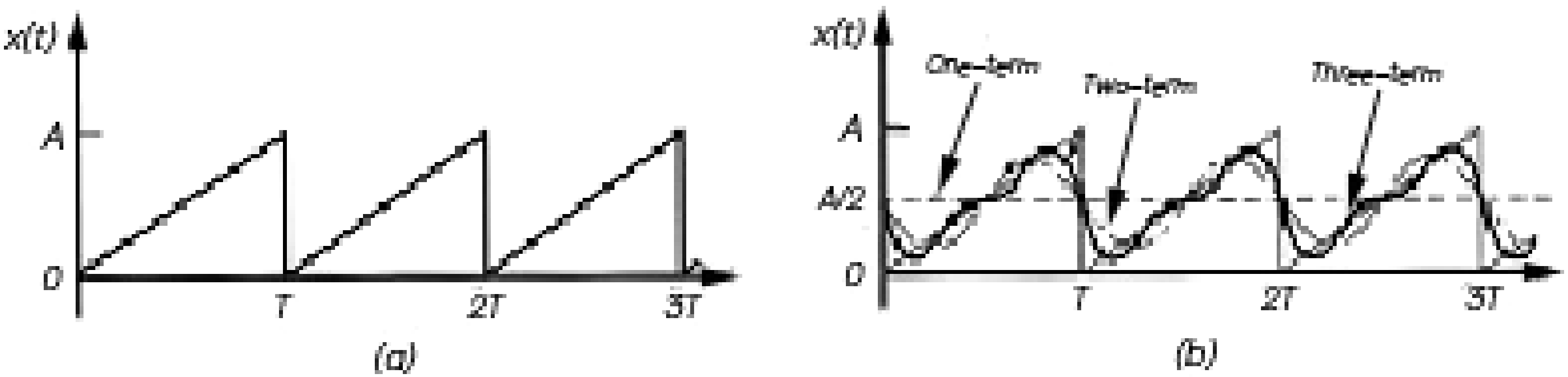
$$x(t) = \int_0^t F(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

ผลการตอบสนองระบบที่มีความหน่วงต่อแรง $F(t)$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \int_0^t \left[F(\tau) e^{\zeta\omega_n \tau} \sin \omega_d (t-\tau) \right] d\tau$$

$$= \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(t-\tau) e^{-\zeta\omega_n \tau} \sin \omega_d \tau d\tau$$

Periodic Force



ประมาณแรงที่กระทำในรูป Fourier series

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega t)$$

โดยที่ $$a_j = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(j\omega t)dt \qquad j = 0,1,2,3,...$$

$$b_j = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(j\omega t)dt \qquad j = 1,2,3,...$$

Periodic Force

สมการการเคลื่อนที่ของระบบที่มีความหน่วง ที่มีแรง F(t) จะได้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega t)$$

โดยประยุกต์วิธี Superposition

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_j \cos(j\omega t)}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_j \sin(j\omega t)}$$

Periodic Force

ผลเฉลยของสมการ

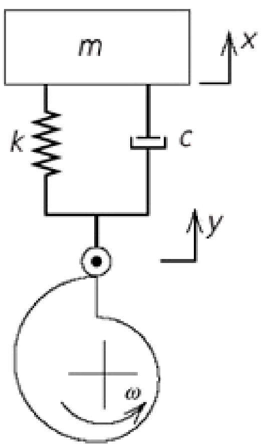
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\frac{a_0}{2} \quad \Rightarrow \quad x(t)=\frac{a_0}{2k}$$

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=a_j\cos(j\omega t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t)=\frac{a_j/k}{\sqrt{\left(1-j^2r^2\right)^2+\left(2\zeta jr\right)^2}}\cos\left(j\omega t-\phi_1\right)}$$

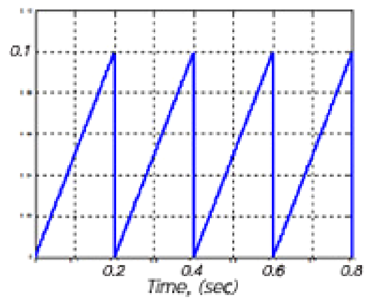
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=b_j\sin(j\omega t) \quad \Rightarrow \quad x(t)=\frac{b_j/k}{\sqrt{\left(1-j^2r^2\right)^2+\left(2\zeta jr\right)^2}}\sin\left(j\omega t-\phi_1\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}x(t)=\frac{a_0}{2k}&+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j/k}{\sqrt{\left(1-j^2r^2\right)^2+\left(2\zeta jr\right)^2}}\cos\left(j\omega t-\phi_1\right)\\&+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j/k}{\sqrt{\left(1-j^2r^2\right)^2+\left(2\zeta jr\right)^2}}\sin\left(j\omega t-\phi_1\right)\end{aligned}}$$

ตัวอย่างที่ e3-7. แบบจำลองกายภาพของระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วง ที่มีแรงกระทำที่ฐานจากแคมดังแสดงในรูป e3-11 และแรงที่กระทำสามารถประมาณด้วย Fourier series คือ



(a)



(b)

$$y(t)=\frac{1}{20\pi}\left[\pi-2\left(\frac{\sin 10\pi t}{1}+\frac{\sin 20\pi t}{2}\right)\right]$$

หรือ

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{20}-\frac{1}{10\pi}\sin 10\pi t-\frac{1}{20\pi}\sin 20\pi t}$$

สมการการเคลื่อนที่ของระบบที่มีแรงกระทำที่ฐาน คือ

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky$$

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\left(-\cos 10\pi t-\cos 20\pi t\right)+k\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{10\pi}\sin 10\pi t-\frac{1}{20\pi}\sin 20\pi t\right)}$$

ความถี่ธรรมชาติ $\omega_n = 14.14$ rad/sec

ค่าอัตราส่วนความหน่วง $\zeta = 0.35$

ค่าคงที่ความหน่วงวิกฤต $c_c = 282.84$ N-s/m

ค่าความถี่ธรรมชาติความหน่วง $\omega_d = 13.24$

โดยประยุกต์วิธี Superposition

$$10\ddot{x} + 100\dot{x} + 2000x = 100$$

$$10\ddot{x} + 100\dot{x} + 2000x = -\frac{200}{\pi}\sin 10\pi t$$

$$10\ddot{x} + 100\dot{x} + 2000x = -\frac{100}{\pi}\sin 20\pi t$$

$$10\ddot{x} + 100\dot{x} + 2000x = -100\cos 10\pi t$$

$$10\ddot{x} + 100\dot{x} + 2000x = -100\cos 20\pi t$$

ผลเฉลยของสมการ a ที่มีแรงกระทำเป็นแบบขั้นบันได สามารถประยุกต์ใช้สมการที่ 3.70 เราจะได้

$$x(t) = 0.05 - 0.533e^{-4.949t}\cos[13.24t - 0.357] \text{ m}$$

ผลเฉลยของสมการ b และ c ที่มีแรงกระทำเป็นแบบ sine เราจะได้ คือ $x(t) = X\sin(\omega_d t - \phi)$

ผลเฉลยสำหรับสมการที่ b จะได้คือ $x(t) = -0.075\sin(13.24t + 0.379) \text{ m}$

ผลเฉลยสำหรับสมการที่ c จะได้คือ $x(t) = -0.00084\sin(13.24t + 0.1661) \text{ m}$

ผลเฉลยของสมการ d และ e ที่มีแรงกระทำเป็นแบบ cosine เราจะได้ คือ $x(t) = X\cos(\omega_d t - \phi)$

ผลเฉลยสำหรับสมการที่ d จะได้คือ $x(t) = -0.0118\cos(13.24t + 0.379) \text{ m}$

ผลเฉลยสำหรับสมการที่ e จะได้คือ $x(t) = -0.0026\cos(13.24t + 0.1661) \text{ m}$

$$\begin{aligned} x(t) = {} & 0.05 - 0.533e^{-4.949t}\cos[13.24t - 0.357] - 0.075\sin(13.24t + 0.379) - 0.00084\sin(13.24t + 0.1661) \\ & - 0.0118\cos(13.24t + 0.379) - 0.0026\cos(13.24t + 0.1661) \end{aligned}$$

Response Spectrum

สำหรับระบบที่ไม่มีความหน่วง $(\zeta = 0)$ ฟังก์ชั่นการตอบสนองแรงดลคือ $h(t-\tau) = \dfrac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)$

ค่าสูงสุดของการตอบสนองการกระจัด คือ

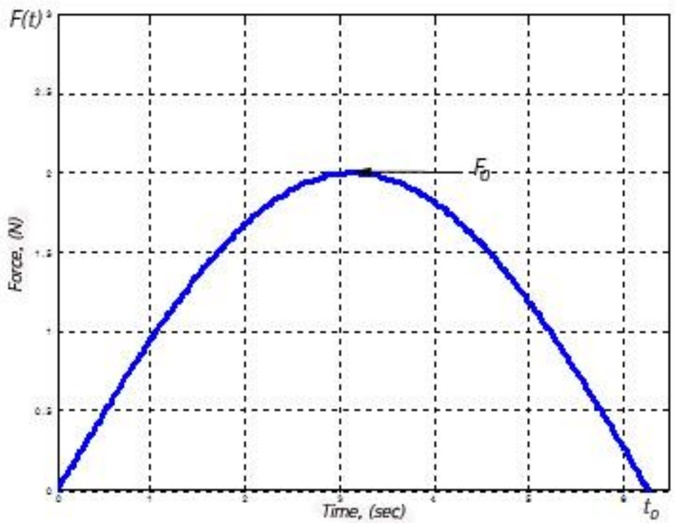
$$x(t)_{\max} = \frac{1}{m\omega_n}\left|\int_0^t F(\tau)\sin\left(\omega_n(t-\tau)\right)d\tau\right|_{\max}$$

สำหรับระบบที่มีความหน่วง ฟังก์ชั่นการตอบสนองแรงดลคือ $h(t-\tau) = \dfrac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)$

การตอบสนองของระบบที่มีความหน่วง

$$x(t)_{\max} = \frac{1}{m\omega_d}\left|\int_0^t F(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\left(\omega_d(t-\tau)\right)d\tau\right|_{\max}$$

ตัวอย่างที่e3-8 จงหาสเปคตัมการตอบสนองสำหรับระบบที่ไม่มีความหน่วง เมื่อระบบมีมวลเท่ากับ 10 kg และค่าความแข็งของสปริงเท่ากับ 1000 N/m แรงที่กระทำมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ e3-12 และเงื่อนไขเริ่มต้นเท่ากับศูนย์



สมการการเคลื่อนที่ของระบบที่ไม่มีความหน่วง

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \begin{cases} F_0 \sin \omega t & 0 \le t \le t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

โดยที่ $\omega = \dfrac{2\pi}{T}, T = 2t_0$ sec

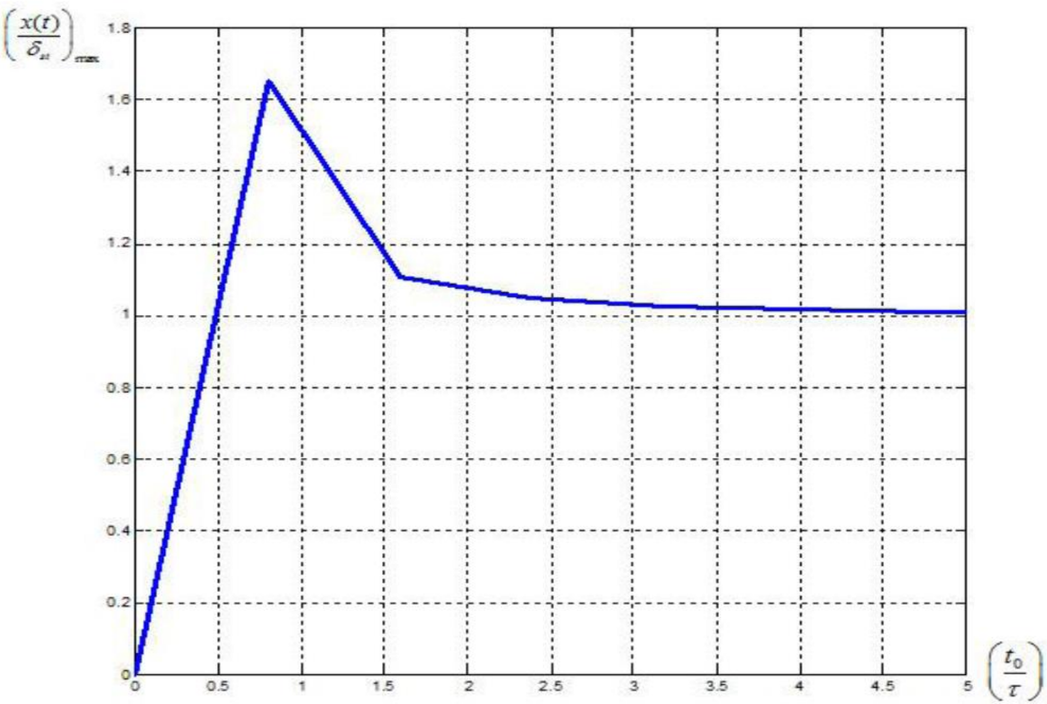
ผลเฉลยของสมการ

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2}\left(\cos \omega t - \cos \omega_n t\right) = \frac{\delta_{st}}{1 - r^2}\left(\cos \omega t - \cos \omega_n t\right), \qquad 0 \le t \le t_0$$

โดยที่ $\omega_n = \dfrac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \rightarrow \tau = \dfrac{2\pi}{\omega_n} = \dfrac{2\pi}{10} = 0.2\pi$ sec และ $r = \dfrac{\omega}{\omega_n} = \dfrac{\pi}{10t_0}$

สมการข้างต้นสามารถจัดรูปใหม่ได้

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}}=\frac{1}{1-r^2}\left(\cos\frac{\pi}{t_0}t-\cos 10t\right)=-\frac{2}{1-\left(\pi/10t_0\right)^2}\sin\left(\frac{\pi+10t_0}{2t_0}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi-10t_0}{2t_0}t\right)$$



ตารางที่ T3-1

t_0 ,(sec)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
t_0/τ	0.795	1.591	2.387	3.141	3.978	4.774
$\left(\frac{x(t)}{\delta_{st}}\right)_{\max}$	1.652	1.109	1.045	1.025	1.016	1.011

Frequency Response

เราพิจารณาระบบมวล–สปริง–ตัวหน่วงที่มีแรงกระทำแบบฮาร์โมนิกส์

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

ที่เงื่อนไขเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ เราสามารถแปลงลาปลาซสำหรับสมการข้างต้นได้

$$\boxed{ms^2 X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)}$$

ระบบมีฟังก์ชั่นถ่ายโอน

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{F_0}{ms^2 + cs + k}$$

หรือ

$$\boxed{G(s) = \frac{F_0}{ms^2 + cs + k} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

โดยที่ ค่าขยาย(Gain) $K = \frac{F_0}{m\omega_n^2} = \frac{F_0}{k}$

Frequency Response

เราจะได้ผลเฉลยของสมการ 3.83 ที่สถานะคงตัว

$$x(t)=F_0\left|G(j\omega)\right|\cos\left(\omega t-\phi\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}G(j\omega)&=\frac{K\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n j\omega+\omega_n^2}=\frac{K\omega_n^2}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)+j2\zeta\omega_n\omega}\\&=\frac{K}{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)+j2\zeta(\omega/\omega_n)}\cdot\frac{\left[\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)-j2\zeta(\omega/\omega_n)\right]}{\left[\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)-j2\zeta(\omega/\omega_n)\right]}\end{aligned}}$$

หรือ $$G(j\omega)=\frac{K\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)}{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}-j\frac{2K\zeta(\omega/\omega_n)}{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}$$

แทน $s=j\omega,\ j=\sqrt{-1}$

Frequency Response

โดยที่ $\mathrm{Re}(\omega)=\dfrac{K\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)}{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}$; $\mathrm{Im}(\omega)=-\dfrac{2K\zeta(\omega/\omega_n)}{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}$

ดังนั้น เราจะได้ $$|G(j\omega)|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega)+\mathrm{Im}^2(\omega)}=\frac{K}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right)$$

Frequency Response: Bode diagram

ขนาดของ $G(j\omega)$ คือ $20\log|G(j\omega)|$

decibel (dB)

ส่วนมุมเฟส ของ $G(j\omega)$

degree

แทน $s = j\omega$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j2\zeta r + (jr)^2}$$

Frequency Response: Bode diagram

ดังนั้นขนาดของแผนภาพโบด จะได้

$$20\log\left|\frac{K}{1+j2\zeta r+(jr)^2}\right| = 20\log|K| + 20\log\left|\frac{1}{1+j2\zeta r+(jr)^2}\right|$$

ในเทอมของ $20\log|K|$ เราจะได้

$$\boxed{20\log|K| = 20\log K = 20\log\frac{F_0}{k}}$$

Frequency Response: Bode diagram

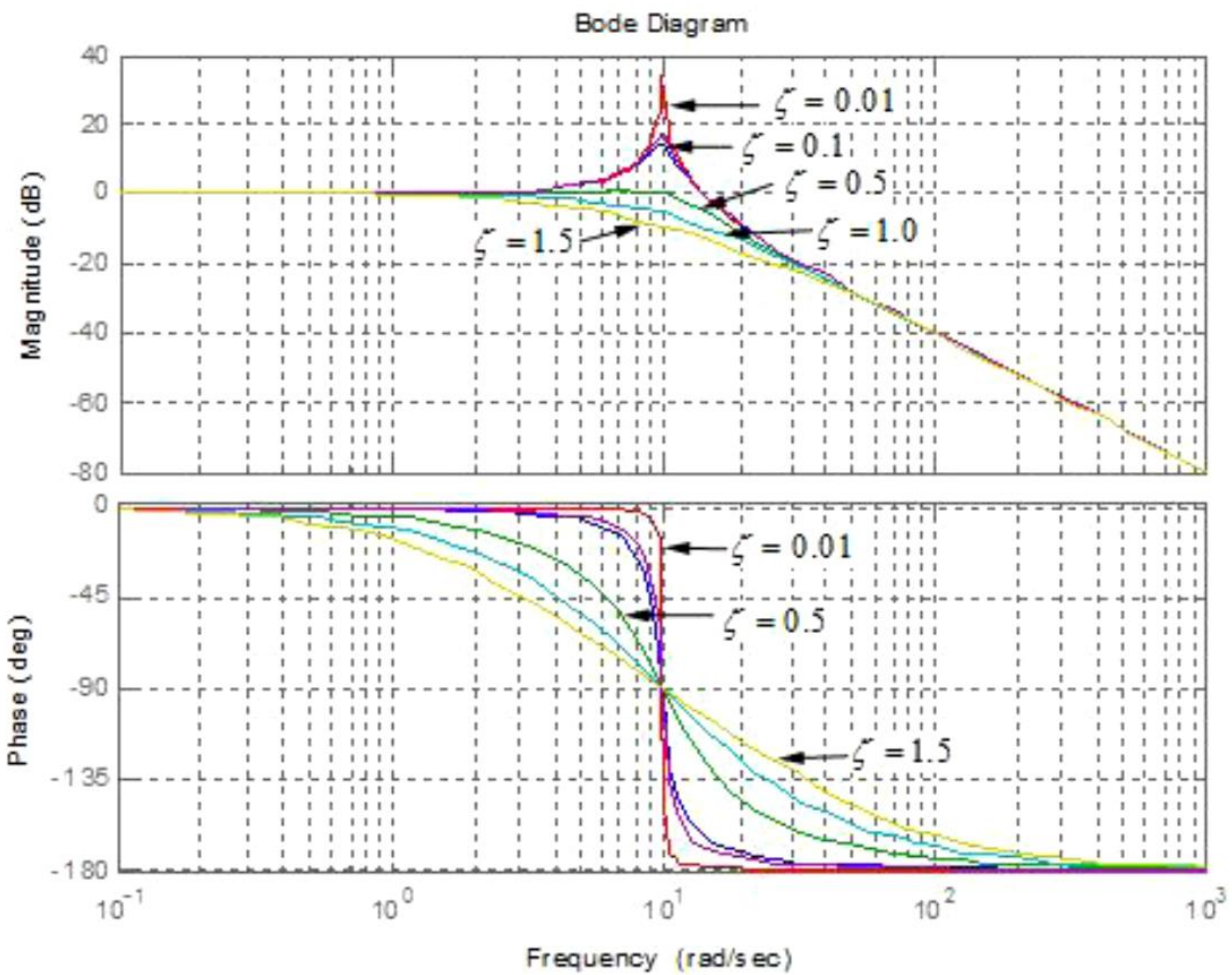
ขนาดของเทอม $20\log\left|\dfrac{1}{1+j2\zeta r+(jr)^2}\right|$ ในรูปของ decibels จะเขียนได้ดังนี้

$$20\log\left|\frac{1}{1+j2\zeta r+(jr)^2}\right| = -20\log\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\zeta r\right)^2}$$

โดยที่ $\mathrm{Im}(\omega)=\dfrac{2\zeta r}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\zeta r\right)^2}$ และ $\mathrm{Re}(\omega)=\dfrac{1-r^2}{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\zeta r\right)^2}$ ดังนั้น

$\left|G(j\omega)\right|=\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\zeta r\right)^2}$ และมุมเฟส $\phi=\tan^{-1}\dfrac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}=-\tan^{-1}\left(\dfrac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$

Frequency Response: Bode diagram



ตัวอย่างที่ e3-11 เมื่อระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วงมีมวล 10 kg, ค่าความแข็งของสปริงเท่ากับ 4000 N/m และค่าคงที่ความหน่วงเท่ากับ 80 N-s/m โดยระบบมีแรงที่กระทำแบบฮาร์โมนิกส์ $F(t)=100\cos\omega t$ จงวาดแผนภาพโบดและวิเคราะห์การตอบสนองเชิงความถี่

ความถี่ธรรมชาติของระบบ $\omega_n = \sqrt{\dfrac{4000}{10}} = 20$ rad/sec

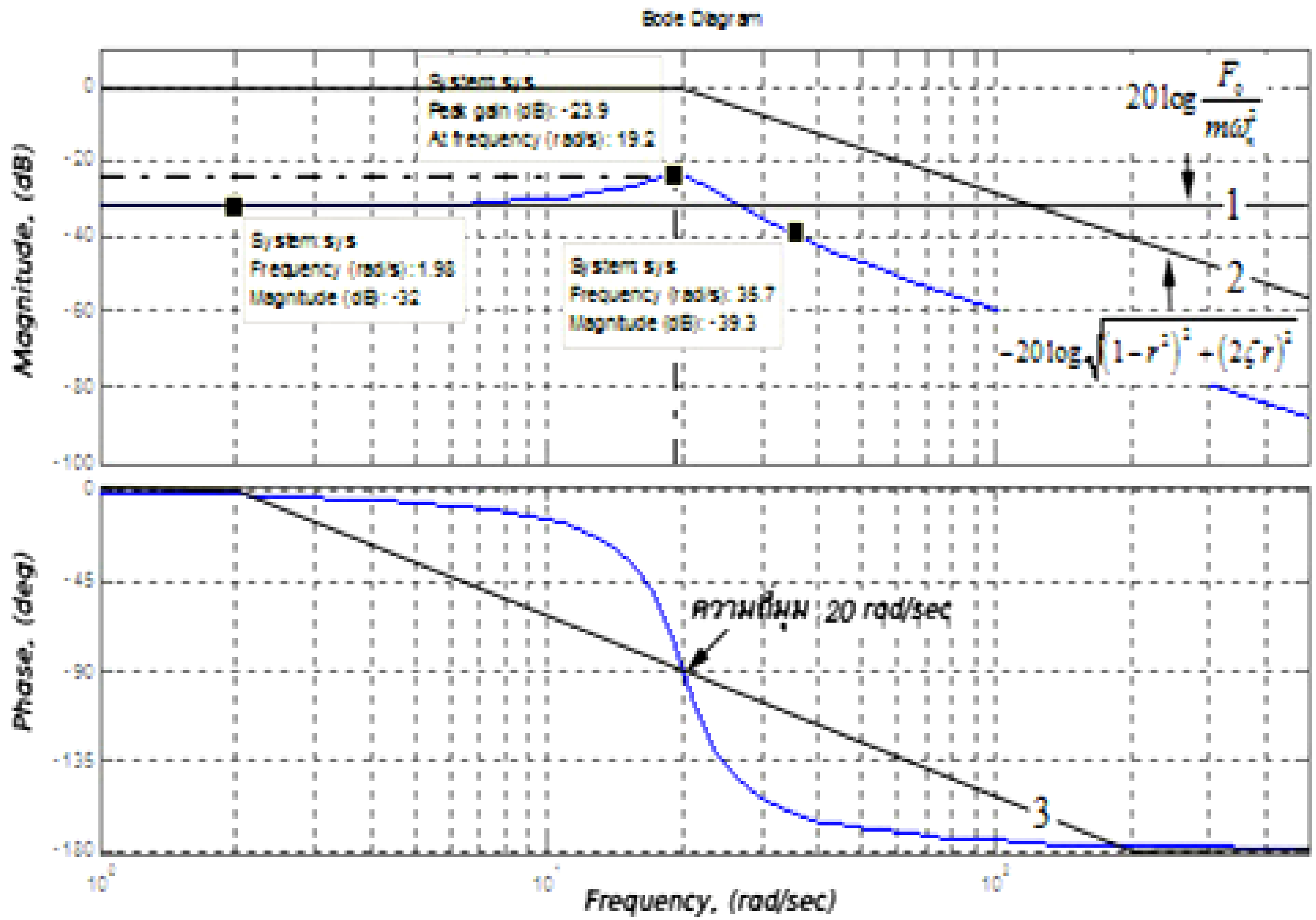
อัตราส่วนความหน่วง $\zeta = \dfrac{c}{2m\omega_n} = \dfrac{80}{400} = 0.2$ เป็นระบบความหน่วงต่ำ

ความถี่ธรรมชาติความหน่วง $\omega_d = 20\sqrt{1-0.2^2} = 19.59$ rad/sec

ขนาดของ $G(j\omega)$ และมุมเฟสของระบบ เราจะได้

เทอมที่ 1 $20\log|K| = 20\log\dfrac{100}{4000} = -32\text{ dB}$ โดยแสดงเส้นที่ 1 ในรูปที่e3-15

เทอมที่ 2 $20\log\left|\dfrac{1}{1+j2\zeta r+(jr)^2}\right| = -20\log\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\zeta r\right)^2}$



ที่ความถี่ $\omega = 20$ rad/sec จะมีมุมเฟสเท่ากับ -90° ดังนั้น $\omega = 20$ rad/sec จะเป็นความถี่มุมของระบบ โดยเส้นที่ 2 แสดงเส้นกำกับ(Asymptotic line)ของเทอมที่ 2 เส้นที่ 3แสดงเส้นกำกับมุมเฟสของเทอมที่ 2 และเส้นสีน้ำเงินคือเส้นแสดงขนาดและมุมเฟสจริงของระบบ ดังแสดงในรูปที่ e3–15

Harmonic force vibration
Damped system

$$50\ddot{x}+500\dot{x}+50000x=100\cos\omega t$$